2 дәірс. Тақырыбы: Комплекс сандар. Комплекс санның тригонометриялық формасы. Комплекс санның модулі, модульдің қасиеттері.

1.3 Тригонометриялық пішінде берілген комплекс сандарға амалдар қолдану. Комплекс сандардың модульдерінің қасиеттері

z_1 және z_2 комплекс сандарының тригонометриялық пішіндері $z_1 = \varsigma_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \varsigma_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Олардың көбейтіндісі келесі формуламен табылады $z_1 z_2 = \varsigma_1\varsigma_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$ яғни комплекс сандарды көбейткенде олардың модульдері көбейтіледі, ал аргументтері қосылады $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $Arg|z_1 \cdot z_2| = Arg\,z_1 + Arg\,z_2$.

z_1 және $z_2 \neq 0$ комплекс сандарының бөліндісі

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varsigma_1}{\varsigma_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \qquad (6)$$

формуласымен анықталады, яғни $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\quad Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg\,z_1 + Arg\,z_2$.

Тригонометриялық пішінде берілген $z = \varsigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс санының натуралдық n-дәрежесі $z^n = \varsigma^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (7)

формуласымен анықталады, яғни $|z^n| = |z|^n$, $\quad Arg\,z^n = nArg\,z + 2\pi k \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \ldots)$

Бұл формуладан Муавр формуласы шығады

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (8)$$

Кез келген z-тің натурал n- дәрежелі түбірінен әр түрлі n мәндер табылады. Олар келесі формуламен анықталады

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (9)$$

мұндағы $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ал $\varphi = \arg z$.

$\sqrt[n]{z}$ -ң бұл мәндеріне центрі координаттың бас нүктесі, радиусы $R = \sqrt[n]{|z|}$ болатын шеңберге іштей сызылған дұрыс n бұрышты көпбұрыштың төбелеріндегі нүктелер сәйкестендіріледі.

Кез келген нақты a санының n дәрежелі түбірінен де әртүрлі n мәндер табылады. Бұл мәндердің ішінде n-ң жұп немесе тақ және a -ң таңбасына байланысты, нақты мәндер екеу, біреу немесе болмауы мүмкін.

Комплексті сандардың модульдерінің қасиеттері.

1. $|\bar{z}| = |z|$.
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
4. $|z^n| = |z|^n$.
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$.
6. $|\mathrm{Re}\,z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$.
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
8. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

12-мысал. $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{90}$ есептеу керек.

Шешуі. $\varsigma = |z| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \quad \varphi = \pi + arctg\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

Яғни $\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Демек, (7) -формуланы қолдансақ

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{90} = 2^{90}\cdot\left[\cos\left(90\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(90\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2^{90}(\cos 60\pi + i\sin 60\pi) = 2^{90}.$$

13-мысал. $z = 1 + i$ комплекс санының 3-дәрежелі түбірін табу керек.

Шешуі. $\varsigma = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$; яғни $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Демек, (9) -формуланы қолдансақ $\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)$,. $(k=0,1,2)$.

Сондықтан $(k=0)$ $\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$(k=1)$ $\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$, $(k=2)$ $\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{2}\left(\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.